

記号	数	番号	
----	---	----	--

検査Ⅲ 数学解答用紙

1 【各 5 点 計 35 点】

(1)	$a = -2, b = 7$
(2)	$\frac{5}{7}$
(3)	$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{15}\overrightarrow{AC}$
(4)	$\frac{5\sqrt{3}-1}{2}$

(5)	$\frac{7}{12}$
(6)	$a = 9, b = -10$
(7)	$\frac{1}{2}(e^{-\pi} + 1)$

2 【各 5 点 計 15 点】

(1)	$t^2 = \sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \sin 2\theta + 1$ であるから, $\sin 2\theta = t^2 - 1$ よって, $y = \sin 2\theta + \sin \theta + \cos \theta = t^2 + t - 1$
(2)	$t = \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ $0 \leq \theta \leq \pi$ より $\frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5}{4}\pi$ であるから, $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$ よって, t のとりうる値の範囲は $-1 \leq t \leq \sqrt{2}$
(3)	$y = t^2 + t - 1 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$ より $-1 \leq t \leq \sqrt{2}$ における最大値は $t = \sqrt{2}$ で $1 + \sqrt{2}$ をとり, 最小値は $t = -\frac{1}{2}$ で $-\frac{5}{4}$ をとる

記号	数	番号	
----	---	----	--

検査Ⅲ 数学解答用紙

3 【(1)(2)各5点, (3)6点 計16点】

(1)	2次方程式 $x^2 - (k+2)x + k^2 = 0$ …① の判別式を D とすると $D = \{-(k+2)\}^2 - 4k^2 = -3k^2 + 4k + 4$ $D > 0 \text{ より } -3k^2 + 4k + 4 > 0$ $3k^2 - 4k - 4 < 0$ $(k-2)(3k+2) < 0 \quad \text{よって} \quad -\frac{2}{3} < k < 2$
(2)	k は自然数であるから, (1) より $k=1$ このとき, ①は $x^2 - 3x + 1 = 0$ これを解いて $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ これがグラフと x 軸の共有点の x 座標である。 よって, 求める線分の長さは $\frac{3 + \sqrt{5}}{2} - \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$
(3)	(1) のとき, ①を解いて $x = \frac{k+2 \pm \sqrt{-3k^2 + 4k + 4}}{2}$ これがグラフと x 軸の共有点の x 座標であるから, 線分の長さを L とすると $L = \sqrt{-3k^2 + 4k + 4} \cdots \text{②} \quad (L \text{ は自然数})$ ここで, $-3k^2 + 4k + 4 = -3\left(k - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{16}{3}$ であるから $0 < L^2 \leq \frac{16}{3}$ この範囲で L^2 が平方数となるのは $L^2 = 1$ または $L^2 = 4$ [1] $L^2 = 1$ のとき ②は $-3k^2 + 4k + 4 = 1$ 整理して $3k^2 - 4k - 3 = 0$ これを解いて $k = \frac{2 \pm \sqrt{13}}{3}$ [2] $L^2 = 4$ のとき ②は $-3k^2 + 4k + 4 = 4$ 整理して $3k^2 - 4k = 0$ これを解いて $k = 0, \frac{4}{3}$ 以上より 求める k の値は $k = \frac{2 \pm \sqrt{13}}{3}, 0, \frac{4}{3}$

記号	数	番号	
----	---	----	--

検査Ⅲ 数学解答用紙

4 【各5点 計15点】

(1)	6人それぞれをA, Bどちらの部屋に分けるか考えて 2^6通り このうち, 1つの部屋だけを使用するのは 2通り よって, 求める場合の数は $2^6 - 2 = 62$ (通り)
(2)	6人それぞれをA, B, Cのどの部屋に分けるか考えて 3^6通り このうち, 1つの部屋だけを使用するのは 3通り 2つの部屋だけを使用するのは, (1)を用いて $62 \times {}_3C_2$ (通り) よって, 求める場合の数は $3^6 - (3 + 62 \times {}_3C_2) = 540$ (通り)
(3)	6人それぞれをA, B, C, Dのどの部屋に分けるか考えて 4^6通り このうち, 1つの部屋だけを使用するのは 4通り 2つの部屋だけを使用するのは, (1)を用いて $62 \times {}_4C_2$ (通り) 3つの部屋だけを使用するのは, (2)を用いて $540 \times {}_4C_3$ (通り) よって, 求める場合の数は $4^6 - (4 + 62 \times {}_4C_2 + 540 \times {}_4C_3) = 1560$ (通り)

記号	数	番号	
----	---	----	--

検査Ⅲ 数学解答用紙

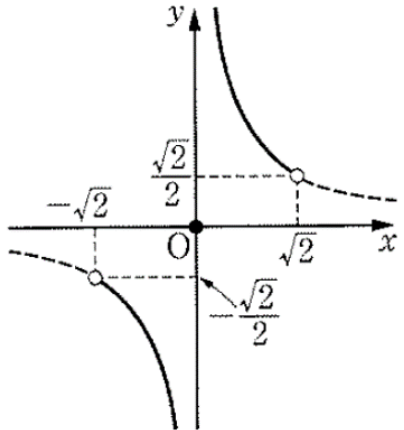
5 【(1) 3点, (2) (3)各5点 計13点】

(1)	$a_2 = \frac{17}{12}$
(2)	[1] $n=1$のとき $a_1 = 2 > 1$であるから $a_n > 1$は成り立つ [2] $n=k$のとき $a_k > 1$と仮定する $n=k+1 \text{ のとき } a_{k+1} - 1 = \frac{2a_k^3 + 1}{3a_k^2} - 1 = \frac{2a_k^3 - 3a_k^2 + 1}{3a_k^2} = \frac{(a_k - 1)^2 (2a_k + 1)}{3a_k^2}$ 仮定より $a_k > 1$であるから $a_{k+1} - 1 > 0$ すなわち $a_{k+1} > 1$ よって, $n=k+1$のときも $a_n > 1$は成り立つ [1][2]よりすべての自然数 n について $a_n > 1$が成り立つ
(3)	$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{2a_n^3 + 1}{3a_n^2} = \frac{3a_n^3 - 2a_n^3 - 1}{3a_n^2} = \frac{a_n^3 - 1}{3a_n^2}$ (2) より すべての自然数 n について $a_n > 1$であるから $a_n^3 > 1$ よって, $a_n^3 - 1 > 0$ ゆえに $a_n - a_{n+1} > 0$ すなわち $a_n > a_{n+1}$

記号	数	番号	
----	---	----	--

検査Ⅲ 数学解答用紙

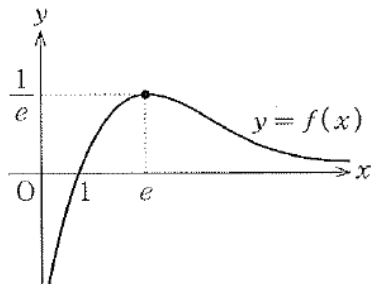
6 【(1) 5点, (2) 6点 計 11点】

(1)	$x + x(1-x^2) + x(1-x^2)^2 + \cdots + x(1-x^2)^{n-1} + \cdots$ は初項 x, 公比 $1-x^2$ の無限等比級数である。 よって, 収束する条件は $x=0$ …① または $1-x^2 < 1$ …② ②より $-1 < 1-x^2 < 1$ $0 < x^2 < 2$ よって $-\sqrt{2} < x < 0, 0 < x < \sqrt{2}$ …③ ①, ③より収束する条件は $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$
(2)	[1] $x=0$ のとき $f(0) = 0$ [2] $-\sqrt{2} < x < 0, 0 < x < \sqrt{2}$ のとき $f(x) = \frac{x}{1-(1-x^2)}$ $= \frac{1}{x}$ [1], [2] より, グラフは右の図 

記号	数	番号	
----	---	----	--

検査Ⅲ 数学解答用紙

7 【(1) 6点, (2) 4点, (3) 5点 計15点】

	$f'(x)=\frac{\frac{1}{x} \cdot x-(\log x) \cdot 1}{x^2}=\frac{1-\log x}{x^2}$$f'(x)=0 \text{ とすると } 1-\log x=0 \text{ より } x=e$ よって、$x>0$における$f(x)$の増減表は <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>...</td><td>e</td><td>...</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td></td><td>↗</td><td>$\frac{1}{e}$</td><td>↘</td></tr></table> 右のようになる。 また、$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{x}=-\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x}=\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^t}=0$ よって、曲線$y=f(x)$の概形は右の図 	x	0	...	e	...	$f'(x)$		+	0	-	$f(x)$		↗	$\frac{1}{e}$	↘
x	0	...	e	...												
$f'(x)$		+	0	-												
$f(x)$		↗	$\frac{1}{e}$	↘												
(2)	(1)より、$f(x)$は区間$x \geq e$で単調に減少する。 $e < \pi$であるから$f(e) > f(\pi)$															
(3)	(2)より、$f(e) > f(\pi)$であるから$\frac{\log e}{e} > \frac{\log \pi}{\pi}$ $\pi \log e > e \log \pi$ よって$\log e^\pi > \log \pi^e$ 底eは1より大きいから$e^\pi > \pi^e$															