記号	数	番号	

検査Ⅳ　数学解答用紙

1　【(1)①～③:各3点, (2)6点, (3)～(7):各5点　計40点】

(1)	① オ	② ウ	③ ア
(2)	$a=-\frac{2}{3}$, $v=\frac{56}{9}$	(3)	$f'(x)=\frac{2}{2x+1}$
(4)	3 : 4	(5)	$a=\frac{1}{3}$, $b=-\frac{4}{3}$
(6)	$\cos 3<\cos 4<\cos 2<\cos 1$		
(7)	$w=(\sqrt{3}-2)+(2\sqrt{3}+1)i$		

2　【10点】

△ACP と△PCB について

∠ACP＝∠PCB＝90°

∠APC＝90°　－∠CPB＝∠PBC

したがって　△ACP∽△PCB である。

ゆえに　AC : CP＝CP : CB

すなわち　$CP^2＝AC\cdot CB＝a\cdot 1＝a$

CP＞0 なので

よって　$CP=\sqrt{a}$

記号	数	番号	

検査Ⅳ　　数学解答用紙

3　【10点】

$x^2-14x+40<0$・・・①　について

$(x-4)(x-10)<0$ より $4<x<10$

$(x+3)(x-a^2+3a)<0$・・・②　について

$(x+3)(x-a^2+3a)=0$ とすると，$x=-3$，a^2-3a

$a^2-3a-(-3)=a^2-3a+3=\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$　より

すべての実数 a において $a^2-3a+3>0$　ゆえに　$a^2-3a>-3$

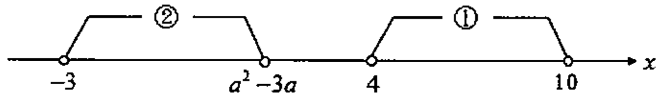
よって②の解は　$-3<x<a^2-3a$

題意より　$a^2-3a\leqq 4$

$a^2-3a-4\leqq 0$

$(a-4)(a+1)\leqq 0$

よって　$-1\leqq a\leqq 4$



4　【10点】

正四面体の各面は正三角形だから，

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$

$=|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OC}|\cos60^\circ-|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\cos60^\circ$

また，　$|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OB}|$

よって，

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

$\overrightarrow{OA}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{BC}\neq\vec{0}$ より，$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BC}$

したがって，

OA⊥BC

記号	数	番号	

検査Ⅳ　数学解答用紙

5 【(1):5点, (2):7点 計12点】

(1)

$\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{4}$ より，$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{3}{4}$ ・・・①

$\cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{4}$ より，$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{4}$ ・・・②

②－①より，$2\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}$

したがって，$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{4}$

(2)

(1) より，

$$\sin^2\alpha\sin^2\beta=\frac{1}{16}$$

$$(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)=\frac{1}{16}$$

$$1-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)+\cos^2\alpha\cos^2\beta=\frac{1}{16}$$

また，①＋②より，

$$2\cos\alpha\cos\beta=1$$

$$\cos^2\alpha\cos^2\beta=\frac{1}{4}$$

したがって，

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}=\frac{19}{16}$$

記号	数	番号	

検査Ⅳ　数学解答用紙

6　【16点】

$0 \leqq k \leqq n$ をみたす整数 k に対して，

直線 $x=k$ 上にあり D に含まれる格子点の個数を $f(k)$ とする。

P $\left(n, 2n^2-6n\right)$ より，直線 OP の方程式は、$y=\left(2n-6\right)x$

したがって，

$$f(k)=\left(2n-6\right)k-(2k^2-6k)+1=-2k^2+2nk+1$$

ゆえに，求める格子点の総数は，

$$\sum_{k=0}^{n} f(k)=\sum_{k=0}^{n}\left(-2k^2+2nk+1\right)$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n}\left(-2k^2+2nk+1\right)=1-2\sum_{k=1}^{n}k^2+2n\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$

$$=1-2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+2n\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$$

$$=\frac{1}{3}(n+1)(n^2-n+3)$$

7　【(1):6点，(2):6点，(3):10 点　計22点】

(1)

直線 PQ の方程式は，点 P を通り直線 l に垂直なので，$y=-2x+\frac{5}{2}t$

この直線と放物線 $y=x^2-2x$ の交点は

$y=-2x+\frac{5}{2}t$ ・・・①　，$y=x^2-2x$ ・・・②　より　$x^2=\frac{5}{2}t$

$x>0$ より　$x=\frac{\sqrt{10t}}{2}$

①より　$y=\frac{5}{2}t-\sqrt{10t}$

よって　求める座標は，$\mathrm{Q}\left(\frac{\sqrt{10t}}{2},\ \frac{5}{2}t-\sqrt{10t}\right)$

記号	数	番号	

検査Ⅳ　　**数学解答用紙**

7

（2）

$S=\pi \mathrm{PQ}^2$

ここで $\mathrm{PQ}^2=\left(\dfrac{\sqrt{10t}}{2}-t\right)^2+\left\{\left(\dfrac{5}{2}t-\sqrt{10t}\right)-\dfrac{1}{2}t\right\}^2$

$$=\left(t-\frac{\sqrt{10t}}{2}\right)^2+4\left(t-\frac{\sqrt{10t}}{2}\right)^2=5\left(t-\frac{\sqrt{10t}}{2}\right)^2$$

よって $S=5\pi\left(t-\dfrac{\sqrt{10t}}{2}\right)^2$

（3）

C と l の交点を O，R とする。

$\mathrm{R}\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{5}{4}\right)$ であるから，$\mathrm{OR}=\sqrt{\left(\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(\dfrac{5}{4}\right)^2}=\dfrac{5\sqrt{5}}{4}$

ここで，$\mathrm{OP}=u$ とおくと

$u=\sqrt{t^2+\left(\dfrac{1}{2}t\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}t$ 　より $\dfrac{du}{dt}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

u	$0\to\dfrac{5\sqrt{5}}{4}$
t	$0\to\dfrac{5}{2}$

求める体積 V は，

$$V=\int_0^{\frac{5\sqrt{5}}{4}}S\,du$$

$$=5\pi\int_0^{\frac{5\sqrt{5}}{4}}\left(t-\frac{\sqrt{10t}}{2}\right)^2du$$

$$=5\pi\int_0^{\frac{5}{2}}\left(t-\frac{\sqrt{10t}}{2}\right)^2\frac{\sqrt{5}}{2}dt$$

$$=\frac{5\sqrt{5}}{2}\pi\int_0^{\frac{5}{2}}\left(t^2-\sqrt{10}t^{\frac{3}{2}}+\frac{5}{2}t\right)dt$$

$$=\frac{5\sqrt{5}}{2}\pi\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{2\sqrt{10}}{5}t^{\frac{5}{2}}+\frac{5}{4}t^2\right]_0^{\frac{5}{2}}=\frac{125\sqrt{5}}{96}\pi$$