検査Ⅱ　　数　　学

解答上の注意　　解答は，全て解答用紙に記入すること。ただし，１は答えのみでよい。

１　次の問いに答えなさい。

（１）$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式 $\tan\theta \leqq 1$ を解きなさい。

（２）すべての実数 x に対して，不等式 $kx^2 - 2\sqrt{3}x + k + 2 > 0$ が成り立つように，定数 k の値の範囲を定めなさい。

（３）袋の中に白球が４個，赤球が３個入っている。ここから同時に２個取り出すとき，取り出した白球の個数を X とする。確率変数 X の期待値を求めなさい。

（４）方程式 $x^2 + y^2 + 2ax - 6ay + 6a^2 + 4 = 0$ が円を表すような定数 a の値の範囲を求めなさい。

（５）次の等式が成り立つように，定数 a，b の値を定めなさい。

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + ax + b}{x^3 - 8} = 2$$

（６）a を正の定数とする。定積分 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ を求めなさい。

（７）放物線 $y^2 = 6y + 2x - 7$ について，次のものを求めなさい。

① 頂点の座標
② 焦点の座標
③ 準線の方程式

２　６個の文字 A，I，O，S，U，Y を，アルファベット順に１番目 AIOSUY，２番目 AIOSYU，……と並べる。このとき，次の問いに答えなさい。

（１）最後の文字列 YUSOIA は何番目になるか求めなさい。

（２）A で始まる文字列は何個あるか求めなさい。

（３）365 番目の文字列を求めなさい。

検査Ⅱ　　数　　学

3　AB＝3，BC＝5，CA＝7 である△ABC において，次の問いに答えなさい。

（1）∠ABC の大きさを求めなさい。

（2）△ABC の内接円の半径 r を求めなさい。

（3）△ABC の内心を I とするとき，BI の長さを求めなさい。

4　3次方程式 $x^3=1$ の虚数解の一つを ω とするとき，次の式の値を求めなさい。

（1）$\omega^2+\omega+1$

（2）$1+\omega+\omega^2+\omega^3+\cdots+\omega^{2027}$

5　平面上に n 本 $(n \geqq 3)$ の直線があって，どの 2 本も平行でなく，どの 3 本も同一の点で交わらないとする。これら n 本の直線によってできる三角形の個数を a_n とするとき，次の問いに答えなさい。

（1）a_4，a_5 を求めなさい。

（2）a_{n+1} を a_n と n の式で表しなさい。

（3）a_n を n の式で表しなさい。

6　A さん，B さんの 2 人は次の課題に取り組んでいる。2 人の会話を読み，次の問いに答えなさい。

課題　方程式 $\sqrt{2x+1}=x-1$ …① を解きなさい。

A さん：どうすれば解くことができるかな。左辺の根号がないといいのだけど…。

B さん：両辺を 2 乗してみるのはどうかな？そうすると

$2x+1=(x-1)^2$ …②となるから，この 2 次方程式ならば解けそうじゃないかな？

A さん：そうだね。右辺を展開して整理すれば解けそうだ。
この 2 次方程式の解は $x=0$ と $x=4$ だからこれが①の解だね。

B さん：あれ，本当にそうかな？ $x=0$ は解にならないんじゃない。代入して A<u>確かめてみようよ</u>。

A さん：確かに $x=0$ は方程式①の解にはならないね。

B さん：等式②は等式①であるための B__________条件だね。問題を解くときには条件について考える必要があるね。

（1）下線部 A について，グラフを利用して $x=0$ が解とならないことを確かめる方法がある。その方法を具体的に記述しなさい。

（2）下線部 B について，適するものを次のア～ウから選び，記号で答えなさい。

ア　必要十分　　イ　必要　　ウ　十分

検査Ⅱ　数　学

7　△OAB において，辺 OA を 2：1 に内分する点をE，辺 OB を 3：2 に内分する点を F とする。また，線分 AF と線分 BE の交点を P とし，直線 OP と辺 AB の交点を Q とする。さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおく。このとき，次の問いに答えなさい。

（1）$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表しなさい。

（2）$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表しなさい。

（3）面積比 △POA : △PAB : △PBO を求めなさい。